LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 8

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. Man zeige, dass

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \ \dots \ , e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

eine Basis für den K-Vektorraum K^n bilden. Man nennt *die kanonische Basis* die Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

2. Man betrachte, die Vektoren $x = (1, -1, 0)$, $y = (2, 1, 1)$ und $z = (1, 5, 2)$ in den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass x, y linear unabhänggig sind, aber x, y, z linear abhängig sind und finde man eine lineare Abhängigkeitsrelation.

3. Man ziege, dass die Vektoren $x = (1, 1, 0)$, $y = (-1, 0, 2)$ und $z = (1, 1, 1)$ eine Basis von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ bilden. Man finde die Koordinaten der Vektoren e_1, e_2, e_3 aus der kanonischen Basis von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ in der Basis $\{x, y, z\}$. Man nennt *Koordinaten* eines Vektors x in einer Basis $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ die einzige Skalaren (siehe die Vorlesung!) $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n \in K$, so dass

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

4. Man ziege, dass die Vektoren $x = (1, 2, -1, 2)$, $y = (2, 3, 0, -1)$, $z = (1, 2, 1, 4)$ und $t = (1, 3, -1, 0)$ eine Basis von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ bilden. Man finde die Koordinaten der Vektoren x, y, z, t in der kanonischen Basis von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.

5. a) Man zeige, dass die Menge

$$\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$$

eine Basis des K-Vektorräumes $K[X]$ bildet.
b) Man finde eine Basis des Unterräumes $K_n[X] = \{p \in K[X] \mid \deg p \leq n\}$ des $K[X]$.

6. Sei A eine Menge. Man zeige, dass die Menge

$$\{f_a : A \to K \mid a \in A\} \text{ wobei } f_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

eine Basis des K-Vektorräumes K^A bildet.

7. a) Ist L ein Unterkörper des Korpers K, so definire eine L-Vektorraumstruktur auf K.
b) Man finde eine Basis des $\mathbb{C}$-Vekttorräumes $\mathbb{C}$.
c) Man zeige, dass die Menge $\{1, i\}$ linear abhängig in den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist, aber eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorräumes $\mathbb{C}$ bildet. (Hier $i^2 = -1$.)

c) Man finde, nötige und genügende Bedingungen über die reele Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Menge $\{a+bi, c+di\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorräumes $\mathbb{C}$ bildet.

8. a) Man zeige, dass

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ K^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$$

ein Untervekrorraum des K-Vektorräumes K^n ist.
b)Man finde, eine Basis von U.

9. Für eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ betrachte man

$$V = \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

a) Man zeige, dass V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.
b) Man bestimme eine Basis von ${}_{\mathbb{Q}}$V.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien
E-mail address, George Ciprian Modoi: cmodoi@math.ubbcluj.ro